ECOLE NATIONALE DES INGENIEURS DES TRAVAUX RURAUX ET DES TECHNIQUES SANITAIRES.

CONCOURS D'ENTRÉE

1979

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DEUXIEME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 3 heures

Ce sujet comporte 2 pages de texte

I

1°) Calculer la somme $A = e^{ix} + t\,e^{2ix} + t^2\,e^{3ix} + \ldots + t^{n-1}\,e^{inx}$, où x et t sont deux nombres réels, et n un entier positif non nul (e^{ix} désigne l'exponentielle du nombre complexe ix).

2°) Soit x un réel fixé tel que $\sin x \neq 0$.

a. On pose, pour tout t réel,

$$\cos x + t\cos(2x) + \ldots + t^{n-1}\cos(nx) = Q(t) + f_n(t) \qquad (1)$$

où $Q(t) = \dfrac{\cos x - t}{1 - 2t\cos x + t^2}$ et f_n une fonction dépendant de n , dont on donnera l'expression.

b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 Q(t)\,dt$.

c. Démontrer la majoration : $\left|\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt\right| \leqslant \frac{2}{\sin^2 x}\int_0^1 t^n\,dt$.

d. En intégrant la relation (1) pour $t \in [0,1]$, calculer la somme $S(x)$ de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\cos(nx)$.

3°) Etudier la fonction S et tracer son graphe. On admettra qu'on peut prolonger la fonction S par continuité aux points $x = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

4°) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{Log}\left(\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)dx$, après avoir montré sa convergence.

(On pourra montrer, par un changement de variable, que $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \operatorname{Log}\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx = \int_0^\pi \operatorname{Log}\left(2\cos\frac{u}{2}\right)du$).

II

On étudie les sommes partielles $S_n(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + \ldots + \frac{1}{n}\cos(nx)$.

On suppose dans cette partie II , $0 \leqslant x \leqslant \pi$ et $n \geqslant 2$.

1°) a. Exprimer la dérivée $S'_n(x)$ sous forme d'un produit de facteurs. En déduire les zéros de la fonction S'_n . On range ces zéros en ordre croissant en les notant $\alpha_0(n)$, $\alpha_1(n)$, $\alpha_2(n)$..... avec $\alpha_0(n) = 0$ et $\alpha_r(n) < \alpha_{r+1}(n)$.

Quel est le nombre total de zéros de S'_n sur l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$?

b. On note $m_r(n) = S_n\left(\alpha_r(n)\right)$. Montrer que, suivant la parité de l'entier r , $m_r(n)$ est un maximum ou un minimum local de la fonction S_n .

c. Pour n fixé, quelle est la borne supérieure de la fonction S_n sur l'intervalle $[0\ ,\ \pi]$?

2°) Tracer le graphe de la fonction S_3 .

III

On note, pour t réel non nul, $g(t) = \dfrac{1-\cos t}{t}$.

1°) Démontrer que la fonction g , prolongée convenablement en 0 , est continue sur $\mathbb{R}$; g est-elle indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$?

2°) a. Former la somme de Riemann de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ,\ a]$ (a réel fixé) obtenue à partir de la subdivision équidistante $\left\{0\ ,\ \frac{a}{n}\ ,\ \frac{2a}{n}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{ka}{n}\ ,\ \ldots,\ \frac{na}{n}\right\}$ en choisissant l'extrémité droite de chaque intervalle de subdivision.

b. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\cos\left(\frac{ka}{n}\right)$ (a réel fixé)

3°) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} m_1(n)$ $\left(\text{voir § II 1°) b. ; } m_1(n) = S_n\left(\alpha_1(n)\right)\right)$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail